

关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想

吴森林, 王 丹, 庞海婧

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对 Hadwiger 猜想这一凸和离散几何中持续了近 60 年的著名难题, 回顾了这一猜想的提出, 它的若干等价形式, 以及前人在尝试解决这一猜想的过程中取得的阶段性进展. 介绍了该猜想相关的若干研究问题及相应结果. 结果表明: 一方面, Hadwiger 猜想仍是一个远未解决的公开难题; 另一方面, 围绕着 Hadwiger 猜想及其相关问题还有大量亟待完成的基础性研究工作.

关键词: Hadwiger 猜想; 凸体; 位似体; 等宽体

中图分类号: O177 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2014)01-0117-07

Hadwiger's Covering Conjecture

WU Sen-lin, WANG Dan, PANG Hai-jing

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: The origin, equivalent forms, and existing partial results concerning Hadwiger's covering conjecture, which is a famous open problem that has lasted for nearly 60 years from convex and discrete geometry, are reviewed. Related research problems and corresponding results are also presented. It is shown that, on the one hand, Hadwiger's conjecture is still a very hard open problem, and, on the other hand, there are a lot of fundamental researches to be done concerning this conjecture and problems related to it.

Key words: Hadwiger's covering conjecture; convex body; homothetic copies; body of constant width

0 预备知识

关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想 (下文中简称为 H-猜想) 是提出于上个世纪 50 年代的属于凸和离散几何领域的一个著名的公开难题. 本文简要地回顾 H-猜想的起源, 综述前人在尝试攻克这一难题的过程中所取得的阶段性成果, 特别是近 5 年来关于 H-猜想的一些新进展, 并介绍与之相关的若干问题.

对 $\mathbb{R}^n$ 中互异的两点 x 和 y , 我们称

$$[x, y] := \{ \lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1] \}$$

为连接 x 和 y 的线段; 称

$$\langle x, y \rangle := \{ \lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

为过 x 和 y 的直线; 称

$$[x, y > := \{ x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 0 \}$$

为从 x 出发过 y 的射线.

对 $\mathbb{R}^n$ 的任一子集 A , 我们分别用 $\text{int}A$, $\text{bd}A$ 和 $\text{cl}A$ 表示 A 的内部, 边界和闭包. 若 $\lambda > 0$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$, 我们称集合

$$\lambda A + x := \{ \lambda y + x : y \in A \}$$

为 A 的一个位似集. 特别的, 若 $K, \lambda A + x$ 称为 A 的

收稿日期: 2013-12-10

基金项目: 国家自然科学基金(11371114, 11171082).

作者简介: 吴森林(1982—), 男, 副教授, 博士, wusenlin@hrbust.edu.cn;

王 丹(1989—), 女, 硕士研究生;

庞海婧(1979—), 女, 硕士研究生.

一个小位似集;若 $\lambda = 1$, $\lambda A + x$ 称为 A 的一个平移.

设 $A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i$, 则我们称 $A_1, \dots, A_m$ 是 A 的一个覆盖. 若对 A 中任意两个互异点 x 和 y , $[x, y] \subseteq A$ 总成立, 则我们称 A 是一个凸集. 若一个凸集 A 还是一个含内点的紧集, 则我们称 A 是一个凸体. 下文中我们用 K 表示一个凸体, 用 K^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体构成的集合. 该集合在 Hausdorff 距离 $d_H(\cdot, \cdot)$ 下构成一个距离空间, 其中, 对任意的 $K_1, K_2 \subseteq K^n$, $d_H(K_1, K_2) := \max\{\sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} d(x, y), \sup_{y \in K_2} \inf_{x \in K_1} d(x, y)\}$. 凸体 K 的一个位似集称为 K 的一个位似体; K 的一个小位似集称为一个小位似体.

1955 年, F. W. Levi 是首位考虑用 K 的内部的一个平移去覆盖 K 的数学家, 参见文 [2] 和文 [3]. 我们用 $c(K)$ 表示覆盖凸体 K 所需的 $\text{int}K$ 的平移的最小个数. 在文 [3] 中, Levi 证明: 对任一非平行四边形的平面凸体 K , $c(K) \leq 3$. 在同一篇文章中 Levi 还未假证明地指出如下两个事实:

1) 对任一 $K \in K^n$, $c(K) \geq n + 1$;

2) 对任一光滑凸体 $K \in K^n$,

$$c(K) = n + 1.$$

同时, 容易验证: 若 $K \in K^n$ 是一个仿立方体(亦即 n 维单位立方体在一个非奇异的仿射变换下的像), 那么 $c(K) = 2^n$. 鉴于上述事实, H. Hadwiger 在 [4] 中提出了如下猜想:

H-猜想: 对任一 $K \in K^n$, $c(K) \leq 2^n$, 且 $c(K) = 2^n$ 当且仅当 K 是一个仿立方体时成立.

尽管大批数学家如 K. Bezdek, V. Boltyanski, I. Gohberg, P. Soltan, V. Soltan, M. Lassak, H. Martini, O. Schramm, B. Weissbach 和宗传明围绕着 H-猜想做了许多重要的工作, 且该猜想被多篇综述与多本专著(文 [5] - [10]) 反复提及, H-猜想在 $\mathbb{R}^3$ 中就已经是一个远未解决的公开问题. 毫无疑问, 该猜想的彻底解决仍需要更多新的思想以及长期和艰苦的工作.

1 H-猜想的若干等价形式

在考虑如何用覆盖一个 Banach 空间的单位球所需要的半径小于 1 的球的最小个数去定义该空间的维数时, I. Gohberg 和 A. Markus [11] 考虑了用凸体 K 的小位似体去覆盖 K 所需的小位似体的最小数目 $a(K)$.

1962 年 P. Soltan [12] 证明, 对任一 $K \in K^n$, $a(K) =$

$c(K)$. 于是我们得到 H-猜想的第一个等价形式, 即

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, 存在覆盖 K 的 $2^n - 1$ 个 K 的小位似体.

1988 年 M. Lassak [13] 指出 $c(K)$ 等于覆盖 $\text{bd}K$ 所需的 K 的小位似体的最小数目(然而 Lassak 并未给出具体的证明). 因此 H-猜想还有如下等价形式, 即

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, 存在覆盖 $\text{bd}K$ 的 $2^n - 1$ 个 K 的小位似体.

H-猜想的另外两个等价形式源于在 1960 年分别由 V. Boltyanski 和 H. Hadwiger 提出的 $\text{bd}K$ 的两类照亮问题.

设 x 是 $\text{bd}K$ 中一点, d 是一个方向(亦即一个非零向量). 若存在一个正实数 λ , 使得 $x + \lambda d \in \text{int}K$, 则我们称 x 可以被 d 方向照亮. V. Boltyanski [14] 证明, 照亮整个 $\text{bd}K$ 所需方向的最小个数 $b(K)$ 等于 $a(K)$. 如前所述,

$$b(K) = a(K) = c(K).$$

因此 H-猜想还等价于

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, 存在能照亮 $\text{bd}K$ 的 $2^n - 1$ 个方向.

若 $x \in \text{bd}K$, $p \notin K$, $[p, x] \cap \text{int}K \neq \emptyset$

且

$$[p, x] \cap \text{int}K = \emptyset,$$

则我们称 K 的外点 p 可以照亮 x .

V. N. Vizitei [15] 在 1961 年证明, 照亮 $\text{bd}K$ 所需的 K 的外点的最小数目 $h(K)$ 等于 $b(K)$. 于是

$$c(K) = a(K) = b(K) = h(K),$$

并且 H-猜想等价于

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, 存在可以照亮 $\text{bd}K$ 的 K 的 $2^n - 1$ 个外点.

H-猜想的另一等价形式与凸体 K 的对偶体 K^* 的表面结构有关. 在本节的剩余部分我们认为原点 $o \in \text{int}K$, 此时

$$K^* := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \forall x \in K\},$$

其中 $\langle z, x \rangle$ 表示 z 与 x 的内积.

若 K^* 的一个子集恰好为 K^* 与 K^* 的某个支撑超平面的交集, 则这个子集称为 K^* 的一个暴露面.

由 K. Bezdek [16] 中的结果我们可以得到 H-猜想的如下等价形式:

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, 存在 $2^n - 1$ 个超平面构成的集合 H , 使得 K^* 的任一暴露面与 o 均可被 H 中的某个超平面严格分离.

2 如何解决 H - 猜想

目前看来,尝试解决 H - 猜想有两种途径. 其一是直接估计 $c(K)$ 的上界. 其二是通过研究 K 的其它数量特征来实现对 $c(K)$ 的间接估计.

2.1 对 $c(K)$ 上界的直接估计

2.1.1 $c(K)$ 的一般上界

$c(K)$ 的一个一般上界是由 M. Lassak^[3] 在 1988 年得到的, 他证明了如下不等式:

$$c(K) \leq (n+1)n^{n-1} - (n-1)(n-2)^{n-1}.$$

通过估计覆盖密度(详细定义参见文[10]中的第 9 节), C. A. Rogers 和宗传明给出了如下上界

$$c(K) \leq \frac{\text{Vol}(D(K))}{\text{Vol}(K)} (n \log n + n \log \log n + 5n)$$

其中 $D(K) = K - K$, $\text{Vol}(K)$ 表示 K 的体积. 再由不等式

$$2^n \leq \frac{\text{Vol}(D(K))}{\text{Vol}(K)} \leq \binom{2n}{n} \quad (1)$$

我们有

$$c(K) \leq \binom{2n}{n} (n \log n + n \log \log n + 5n).$$

特别的, I. Papadoperakis^[7] 证明了 $c(K) \leq 16$ 对任一 $K \in K^3$ 成立.

2.1.2 特殊凸体 $c(K)$ 值的上界

如前所述, 对任一光滑的凸体 $K \in K^n$, $c(K) = n+1$. Boltyanski^[4] 在 1960 年证明, 若 K 的不光滑点的数目不超过 n , 则 $c(K)$ 仍然等于 $n+1$. 特别的, 若一个 3 维凸体 K 至多有 4 个不光滑点, 那么 $c(K) = 4$.

等宽凸体 $c(K)$ 值的上界得到了较多的关注. 若一个凸体 K 的任意的两个支撑超平面之间的距离是一个固定常数 ω , 我们称 K 是一个等宽体, 称 ω 为 K 的宽度. 1981 年 B. Weissbach^[8] 证明, 若一个宽度为 ω 的等宽体外切球的半径 γ 满足

$$\gamma \leq \omega \sqrt{\frac{n}{(2n+1)}} \sqrt{\frac{n}{(2n-2)}}$$

则 $c(K) \leq n+1$. 1988 年, O. Schramm^[9] 证明, 对一个等宽体 $K \in K^n$,

$$c(K) \leq 5n \sqrt{n} (4 + \log n) \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

当 $n \geq 16$ 时, 该不等式可推出 $c(K) \leq 2^n$. 2012 年 K. Bezdek^[2] 对一类更广泛的凸体得到了类似的估计.

1990 年, B. Weissbach^[2] 证明, 对一个等宽体 $K \in K^n$,

$$c(K) \leq 4\sqrt{2}\sqrt{n} \left(n \log(\sqrt{2}n \log n) + \frac{1}{2} \log(48n) \right) \frac{\log n}{\log n - 2}.$$

M. Lassak^[2] 和 B. Weissbach^[2] 分别证明, $c(K) \leq 6$ 对任一 $K \in K^3$ 成立. 对于 3 维的情形, K. Bezdek^[8] 在 2010 年提出了如下猜想, 即

$c(K) = 4$ 对任一 3 维等宽体成立.

当 $K \in K^n$ 中心对称时, 式(1)中左端的等号成立, 因此

$$c(K) \leq 2^n (n \log n + n \log \log n + 5n).$$

M. Lassak^[2] 在 1984 年对 H - 猜想的 3 维情形得到了一个实质性的进展. 他证明了 $c(K) \leq 8$ 对任一中心对称的 $K \in K^3$ 成立. 在同一篇文章中他提出了如下问题: 任一非仿立方体且中心对称的 $K \in K^n$ 的边界是否均可由 $2^{n-1} - 1$ 对相对的方向照亮? 特别的, 任一非仿立方体且中心对称的 3 维凸体的边界是否均可由 3 对相对的方向照亮? 考虑这类问题时我们将会用到投影边界的定义. 设 $K \in K^n$, u 是一个方向. 我们称

$$\text{Sbd}_K(u) := \{z \in \text{bd}K; z + \langle -u, u \rangle \cap \text{int}K = \emptyset\}$$

为 K 在 u 方向上的投影边界. 容易验证,

$$\text{Sbd}_K(u) = \text{Sbd}_K(-u).$$

令

$$\text{IC}_K(u) = \{z \in \text{bd}K; u \text{ 可以照亮 } z\}.$$

显然的, K 不能被一对相对的方向 u 和 $-u$ 照亮的部分恰好为

$$\text{Sbd}_K(u) = \text{Sbd}_K(-u).$$

接下来我们称

$$\text{Sbd}_K(u) \cap \text{cl}(\text{IC}_K(u))$$

为 $\text{Sbd}_K(u)$ 的下沿, 称

$$\text{Sbd}_K(u) \cap \text{cl}(\text{IC}_K(-u))$$

为 $\text{Sbd}_K(u)$ 的上沿.

B. V. Dekster^[2] 在 1994 年证明: 若存在方向 u 使得 $\text{Sbd}_K(u)$ 的上沿(或下沿)中所有的点均是 $\text{bd}K$ 的光滑点, 则 $c(K) = n+1$. 在另一篇文章中, B. V. Dekster^[2] 证明, 任一关于某个平面对称的 3 维凸体 K 均满足 $c(K) \leq 8$.

前人对带形体, 带状体和带体的 $c(K)$ 值的上界给出了比较优良的估计.

若一个凸体可以表示为有限条线段的和, 则我们称该凸体一个带形体(zonotope); 若一个凸体是一列带形体在 Hausdorff 距离下的极限, 则我们称该凸体是一个带状体(zonoid). 为了给出带体的定义, 我们需要引入一些额外的定义. 设 $x \in \text{bd}K$, H 是 K 在 x 点处的一个支撑超平面, 我们称由 H 确定且包含 K 的闭半空间为 K 在 x 点处的一个支撑半空间, 称 K 在 x 点处的支撑半空间的交集为 K 在 x 点处的

支撑锥. 我们称一条从 x 出发的与 $\text{int}K$ 不相交且含于 K 在 x 点处的支撑锥的射线为 K 在 x 点处的一条切射线. 设 $u \in \mathbb{R}^n$ 是一个方向. 若对 K 的任一条平行于 $\langle -u, u \rangle$ 的支撑直线 L 及任一点 $x \in L \cap K$, 由 x 和 L 所确定的两条射线之一是 K 在 x 点处的一条切射线, 则我们称 u 是一个带向量 (belt vector). 记 $H(K)$ 为 K 在光滑的边界点处的单位外法向的全体构成的集合. 若对任意的 $q \in cl(H)$ 及任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在线性无关的 K 的带向量 $u_1, \dots, u_{n-1}$ 使得它们张成的超平面的某个单位法向量 p 满足 $\|p - q\| < \varepsilon$. 在文 [27] 和 [28] 中, V. Boltyanski 和 P. Soltan 证明, 不等式 $c(K) \leq 3 \cdot 2^{n-2}$ 对任一异于仿立方体的带体 $K \in K^n$ 成立.

文 [5] 和 [9] 证明, 上述不等式对任一异于仿立方体的 n 维带体也成立. 值得一提的是 n 维带体的全体在空间 K^n 中是稠密的.

对一个凸体 K 的 Helly 维数 $\text{him}(K)$ 是满足如下条件的最小正整数 h : 若 F 是一个含至少 $h+2$ 个 K 的平移的集系, 且 F 中任一 $h+1$ 个集合的交集均非空, 则 F 中所有集合的交集非空. 由 Helly 定理, $1 \leq \text{him}(K) \leq n$. 于是 K 的 Helly 维数很自然地将 K^n 中的凸体分为了 n 类. 而且, B. Szökefalvi - Nagy [30] 在 1954 年证明, $\text{him}(K) = 1$ 当且仅当 K 是一个仿立方体. V. Boltyanski [34] 证明, 若 $\text{him}(K) = 2$, 则

$$c(K) \leq 2^n - 2^{n-2}.$$

他还提出了如下问题: 若

$$\text{him}(K) = m \geq 2,$$

不等式

$$c(K) \leq 2^n - 2^{n-m}$$

是否成立?

中心对称凸体 $c(K)$ 值的上界还可以由 K 的遮挡数 (blocking number) $\beta(K)$ 来控制, 其中 $\beta(K)$ 指的是与 K 相切并能阻止任一其它平移体与 K 接触的互不相交的平移体的最小数目. 在文 [32] 中, 宗传明证明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意中心对称的凸体 K 都有 $c(K) \leq \beta(K)$.

一般来讲, $\beta(K)$ 的取值不容易计算, 但是前人证明了如下事实:

- 1) 若 K 是一个 n 维仿立方体, 则 $\beta(K) = 2^n$.
- 2) 若 K 是 3 维空间中的单位球, 则 $\beta(K) = 6$.
- 3) 若 K 是 4 维空间中的单位球, 则 $\beta(K) = 9$.
- 4) 若 K 是正八面体, 则 $\beta(K) = 6$.

在文 [10] 中, 宗传明提出了下面的猜想: 对于任一 n 维凸体 K , 都有

$$2n \leq \beta(K) \leq 2^n;$$

右端的等式当且仅当 K 为一个仿立方体时成立.

我们用 $c(K)$ 的两个性质来结束本小节, 其一是 $c(K)$ 的上半连续性: 对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一凸体 K_1 , 都存在一个实数 $\delta > 0$, 满足 $\rho(K_1, K_2) < \delta$, 则有

$$c(K_2) \leq c(K_1).$$

这一性质是 H - 猜想如此困难的重要原因之一.

其二是, 若 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 K 是两个凸集 K_1 和 K_2 的向量和, 即 $K = K_1 + K_2$, 且 K_1 是一个凸体, 则有 $c(K) \leq c(K_1)$.

2.2 估计 $c(K)$ 上界的间接方法

为了给出本节中 H - 猜想的又一等价形式, 我们需要定义一个新的泛函. 在此之前, 首先令 A^n 是 $\mathbb{R}^n$ 空间中所有非奇异仿射变换构成的集合, 对任意两个 n 维凸体 K_1 和 K_2 , 它们之间的 Banach - Mazur 距离 $d_{BM}(K_1, K_2)$ 定义为

$$d_{BM}(K_1, K_2) = \log \min \{ \gamma \geq 1 : K_1 \subset T(K_2) \subset \gamma K_1 + x, \\ x \in \mathbb{R}^n, T \in A^n \}.$$

$\gamma_m(K)$ (参见文 [32] 和 [33]) 是使得凸体 K 能够被 m 个 γK 的平移所覆盖的最小正实数 γ . 令

$$\Gamma(n, m) = \max_{K \in K^n} \{ \gamma_m(K) \}$$

且

$$\gamma(n, m) = \min_{K \in K^n} \{ \gamma_m(K) \}.$$

$\gamma_m(K)$, $\Gamma(n, m)$ 和 $\gamma(n, m)$ 有下列性质:

- 1) 当 $m \leq n$ 时, 有 $\gamma_m(K) = 1$.
- 2) $\gamma_m(K) \geq \gamma_{m+1}(K)$.
- 3) $\gamma(2, 3) = \frac{2}{3}, \gamma(2, 4) = \frac{1}{2}, \gamma(2, 5) = \frac{1}{2}$.
- 4) $\Gamma(2, 3) = 1, \Gamma(2, 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Gamma(2, 7) = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma(2, 8) = \frac{1}{2}.$$

根据前文的讨论容易验证 H - 猜想等价于:

对任一非仿立方体的 $K \in K^n$, $\gamma_{2^n-1}(K) < 1$.

宗传明在文 [32] 中提出了有关 $\gamma_m(K)$ 的连续性定理: 对于任意一对正整数 m, n , 函数 $\gamma_m(K)$ 在 K^n 上都是一致连续的.

受宗传明的工作的启发, 吴森林 [34] 引入了关于内部含 o 的凸体 K 的新的泛函, 并得到了 H - 猜想的另外两个等价形式, 即

若集合 $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ 满足

$$K \subseteq C + \text{int}K.$$

则我们称 C 是 K 的一个 L - 构图.

若存在正实数 γ 使得 C 满足

$$K \subseteq C + \gamma K.$$

则我们称 C 是 K 的一个 γ -构图.

显然的, $c(K)$ 等于 K 的 L -构图所含元素的最小个数, 它也等于 K 的 γ -构图 (γ 为 $(0, 1)$ 之间的任意值) 所含元素的最小个数. 记

$$A(K, m) :=$$

$\{\gamma > 0: \text{存在含于 } \gamma(\text{bd}K) \text{ 的 } m \text{ 元 } L\text{-构图}\},$

$$\gamma(K, m) := \begin{cases} 0, & A(K, m) = \Phi, \\ \sup A(K, m), & A(K, m) \neq \Phi, \end{cases}$$

$\gamma'(K, m) := \inf\{\gamma > 0: \text{存在 } \eta \geq 0 \text{ 和含于 } \eta(\text{bd}K) \text{ 的 } m \text{ 元 } \gamma\text{-构图}\}.$ 可以证明, 在 $\gamma'(K, m)$ 的定义中, “inf” 可以用 “min” 来代替.

上述两个泛函具有如下基本性质:

$$1) 0 \leq \gamma(K, m) \leq \sigma(K).$$

$$2) \max\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{m}}, \frac{1}{1 + \sigma(K)}\right\} \leq \gamma'(K, m) \leq 1.$$

3) $\gamma(K, m)$ 关于 m 不减, $\gamma'(K, m)$ 关于 m 不增. 其中

$$\sigma(K) := \min\{\gamma > 0: -K \subseteq \gamma K\}.$$

吴森林^[34]证明, 下面的事实等价:

$$1) c(K) \leq m;$$

$$2) \gamma(K, m) > 0;$$

$$3) \gamma'(K, m) < 1.$$

因此我们可以得到 H -猜想的如下两个等价形式:

1) $\gamma(K, 2^n - 1) > 0$ 对任一异于仿立方体的 $K \in K^n$ 成立.

2) $\gamma'(K, 2^n - 1) < 1$ 对任一异于仿立方体的 $K \in K^n$ 成立.

同时, 吴森林^[34]还讨论了 $\gamma'(K, m)$ 关于 K 的稳定性, 并证明了如下结论: 若

$$D \subseteq K^n, m \in N, m \geq n + 1$$

满足:

1) 对任一 $K' \in D, \gamma'(K' - C_{K'}, m) \leq \gamma_0$, 其中 $C_{K'}$ 为 K' 的质心, $\gamma_0 \in (0, 1)$;

2) 对任一 $K \in K^n$, 存在 $K' \in D$ 使得

$$\beta := d_{BM}(K, K') \text{ 满足}$$

$$\min\left\{1 - \frac{1}{(1+n)\beta - n}, (1+n)\beta - n - 1\right\} \leq \frac{1}{2}(1 - r_0).$$

则 $c(K) \leq m$ 对任一 $K \in K^n$ 成立. 上述结论为攻克 H -猜想提供了一个方案.

3 一些相关问题

设 $K, L \in K^n$. 我们用 $f(K, L)$ 表示使得如下蕴含

关系成立的 λ 的下确界:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq 1, \sum_i \lambda_i \geq \lambda$$

$$\Rightarrow \text{存在 } x_1, x_2, \cdots \text{ 使得 } K \subseteq \bigcap_i (\lambda_i K + x_i).$$

M. Naszódí^[35]证明了如下不等式

$$f(K, L) \leq 2^n \frac{\text{Vol}\left(L + \frac{K \cap (-K)}{2}\right)}{\text{Vol}(K \cap (-K))}$$

并由此得到了 $f(K, K)$ 上界的估计:

$$f(K, K) \leq \begin{cases} 3^n, & K = -K, K \in K^n \\ 6^n, & K \in K^n \end{cases}$$

记 $f(n) := \sup\{f(K, K) : K \in K^n\}.$

关于 $f(2)$ 的上界, L. Fejes Toth 提出了如下猜想:

$$f(2) \leq 3.$$

目前关于 $f(2)$ 的最好的上界是由 Januszeński^[36]在 2003 年给出的

$$f(2) \leq 6.5.$$

对于 $K \in K^n$ 还可以定义如下泛函

$$g(K) = \inf\left\{\sum_i \lambda_i : K \subseteq \bigcup_i \lambda_i K + x_i, 0 < \lambda_i < 1, x_i \in R^n\right\}.$$

令

$$g(n) := \inf\{g(K) : K \in K^n\}.$$

V. Soltan 在 1990 年提出了如下猜想:

$$g(n) \geq n.$$

V. Soltan 和 V. Vászárhelyi^[37]证明了 $g(2) \geq 2$.

他们还证明了, 若

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} \lambda_i K + x_i$$

则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \geq n.$$

M. Naszódí^[35]在 2010 年证明了 $g(n)$ 的下述渐近估计:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n} = 1.$$

对任意两个凸体 K 和 L , 我们称

$$N(K, T) = \min\{m : m \in N, \exists x_1, \cdots, x_m \in R^n$$

$$\text{s. t. } K \subseteq \bigcup_{i=1}^m (x_i + T)\}$$

为 K 关于 T 的覆盖数 (covering number), 参见文 [8]; 称

$$M(K, T) = \max\{m : m \in N, \exists x_1, \cdots, x_m \in R^n$$

$$\text{s. t. } (x_i + T) \cap (x_j + T) = \Phi, \forall i \neq j\}$$

为 K 关于 T 的分离数 (separation number), 参见

文 [8]. 不难验证

$$N(K, T-T) \leq M(K, T) \leq N(K, T).$$

对任一 $A \subseteq R^n$, 令

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

设

$$S = \{(x_i, \omega_i) : x_i \in K, \omega_i > 0, i = 1, \dots, m\}$$

是 m 个有序对构成的集合. 若

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \chi_{(T+x_i)}(x) \geq 1, \forall x \in K,$$

则我们称 S 为 K 关于 T 的一个加权覆盖. 称

$$\omega(S) = \sum_{i=1}^m \omega_i$$

为 S 的总权重. 令 $N_\omega(K, T)$ 表示 K 关于 T 的加权覆盖的总权重的下确界, 并称之为 K 关于 T 的加权覆盖数. 类似的, 若

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \chi_{(T+x_i)}(x) \leq 1, \forall x \in K,$$

则我们称 S 是 K 中的一个加权 T -分离集, 并称

$$\omega(S) = \sum_{i=1}^m \omega_i$$

为 S 的总权重. 令 $M_\omega(K, T)$ 表示 K 中加权 T -分离集的总权重的上确界, 并称之为 K 的加权 T -分离数.

S. Artstein-Avidan 和 O. Raz [8] 证明了下列事实:

- 1) $N(K, 2T) \leq N_\omega(K, T) \leq N(K, T)$.
- 2) $N_\omega(K, T) = M_\omega(K, T)$.
- 3) $N_\omega(K, T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{N(K^m, T^m)}$.

其中对任意的 $A \subseteq R^n, m \in N$,

$$A^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in A\}.$$

若 $K \in K^n$ 关于 o 中心对称, 我们记 $\|\cdot\|_K$ 为由 K 给出的范数. 令

$$\text{ill}(K) = \inf \left\{ \sum_i \|p_i\|_K : \{p_i\} \text{ 可以照亮 } \text{bd}K \right\}.$$

Bezdek [9] 证明: $\text{ill}(K) \leq 6$ 对于任一关于 o 对称的 $K \in K^2$ 成立, 其中等式当且仅当 K 是一个仿射正六边形时成立.

文 [10] 和 [11] 中证明, 对于 3 维立方体, 正八面体, 正十二面体和正二十面体, $\text{ill}(K)$ 的取值分别为 $8, 6, 4\sqrt{5} + 2$ 和 12 . T. Bang 在 [12] 中猜测: 任一关于 o 中心对称的 $K \in K^3$ 满足 $\text{ill}(K) \leq 12$.

类似于 $\text{ill}(K)$, K. J. Swanepoel [13] 引入如下常数

$$\text{cov}(K) = \inf \left\{ \sum_i \frac{1}{1 - \lambda_i} : K \subseteq \bigcup_i (\lambda_i K + x_i), \right.$$

$$\left. 0 < \lambda_i < 1, x \in R^n \right\}.$$

Swanepoel 证明, 若 $n \geq 2$, 则对于任一关于 o 对称的凸体 $K \in K^n$,

$$\text{ill}(K) \leq 2 \text{cov}(K) \leq O(2^n n^2 \log n).$$

专著 [1] 中提出了如下问题:

$$\text{ill}(K) \leq O(2^n)$$

是否对任一关于 o 中心对称的 $K \in K^n$ 成立?

仍然假设 K 是 o 中心对称的凸体, 令

$$\text{vein}(K) = \inf \left\{ \sum_i \|p_i\|_K : K \subseteq \text{conv}\{p_i\} \right\},$$

其中 $\text{conv}A$ 表示一个集合 A 的凸包.

容易验证, 对任一非奇异的线性变换 T ,

$$\text{vein}(K) = \text{vein}(T(K)).$$

显然 $\text{vein}(K) \leq \text{ill}(K)$, 且上式中的等号当且仅当 K 光滑时成立.

Bedzek 在 [14] 中证明了下列事实:

$$1) \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi e}} \leq \text{vein}(B_2^n) \leq 2n^{\frac{3}{2}}, \text{ 其中 } B_2^n \text{ 是 } R^n \text{ 的单}$$

位球.

2) 存在一个与 n ($n \geq 2$) 无关的常数 $c > 0$ 使得不等式

$$\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi e} \text{ovr}(K)} \leq \text{vein}(K) \leq cn^{\frac{3}{2}} \log(2n)$$

对每一个关于 o 中心对称的 $K \in K^n$ 成立, 其中

$$\text{ovr}(K) = \inf \left\{ \frac{\text{Vol}(\varepsilon)}{\text{Vol}(K)} : \varepsilon \text{ 是一个包含 } K \text{ 的椭圆} \right\}.$$

文献 [15] 给出了 $\text{vein}(K)$ 的一个下界 $\text{vein}(K) \geq 2n$.

4 结 语

正如 [10] 中所指出的, 距离 Hadwiger 猜想的终点还是遥遥无期. 希望本文对这一问题及其发展现状的介绍能让更多的人关注并对该问题的完全解决做出贡献. 同时, 作者要感谢宗传明和 Horst Martini 两位教授, 他们二人的引领使得我们可以进入这一富有挑战并充满机遇的研究领域, 与他们的深入讨论也使我们受益匪浅.

参 考 文 献:

- [1] FUCHS L, GÖBEL R. Abelian Groups [M]. New York, Dekker, 1993: 1-14.
- [2] LEVI F W. Ein Geometrisches Überd Eckungsproblem [J]. Arch. Math., 1954, 16: 467-478.

- [6] LEVI F W. Überdeckung Eines Eibe Reiches Durch Parallelverschiebungen Seines Offenen Kerns [J]. Arch. Math., 1955, (6): 369–370.
- [7] HADWIGER H. Ungelöste Probleme [J]. Elem. Math., 1957, 12: 121.
- [8] BOLTJANSKI V, MARTINI H, SOLTAN P. Excursions into Combinatorial Geometry [M]. Berlin: Springer Verlag, 1997: 255–315.
- [9] MARTINI H, SOLTAN V. Combinatorial Problems on the Illumination of Convex Bodies [J]. Aequationes Math., 1999, 57: 121–152.
- [10] BRASS P, MOSER W, PACH J. Research Problems in Discrete Geometry [M]. Berlin: Springer Verlag, 2005: 75–149.
- [11] BEZDEK K. Classical Topics in Discrete Geometry [M]. New York: Springer, 2010: 23–32.
- [12] BEZDEK K. The Illumination Conjecture and Its Extensions [J]. Period. Math. Hungar., 2006, 53: 59–69.
- [13] 宗传明. 离散几何欣赏 [M]. 北京, 科学出版社, 2009: 26–36.
- [14] GOHBERG I, MARKUS A. A Problem on Covering of Convex Figures by Similar Figures [J]. Izv. Mold. Fil. Akad., 1960, 10: 87–90.
- [15] SOLTAN P. On the Illumination of the Boundary of a Convex Body from within [J]. Math. Sb., 1962, 57: 443–448.
- [16] LASSAK M. Covering the Boundary of a Convex Set by Tiles [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, 104: 269–272.
- [17] BOLTJANSKI V. The Problem on Illumination of the Boundary of a Convex Body [J]. Izv. Mold. Fil. Akad., 1960, 10: 77–84.
- [18] VIZITEI V N. Some Problems on the Covering and Illumination of Unbounded Convex [J]. Izv. Akad. Nauk Mold., 1961, 10: 3–9.
- [19] BEZDEK K. On the Illumination of Smooth Convex Bodies [J]. Arch. Math., 1992, 58: 611–614.
- [20] PAPADOPOPOULOS I. An Estimate for the Problem of Illumination of the Boundary of a Convex Body in E^3 [J]. Geom. Dedicata, 1999, 75: 275–285.
- [21] WEISSBACH B. Eine Bemerkung zur Überdeckung Beschränkter Mengen Durch Mengen Kleineren Durchmessers [J]. Beiträge Algebra Geom., 1981, 11: 119–122.
- [22] SCHRAMM O. Illuminating Sets of Constant Width [J]. Mathematika, 1988, 35: 180–189.
- [23] BEZDEK K. Illumination Spindle Convex Bodies and Minimizing the Volume of Spherical Sets of Constant Width [J]. Discrete Comput. Geom., 2012, 47: 275–287.
- [24] WEISSBACH B. Einiges Über Körper fester Breite [J]. Beiträge Algebra Geom., 1990, 31: 69–76.
- [25] LASSAK M. Illuminating of Three-dimensional Convex Bodies of Constant Width [J]. Aristotle Univ., 1997, 39 (4): 246–250.
- [26] WEISSBACH B. Invariante Beleuchtung Konvexer Körper [J]. Beiträge Algebra Geom., 1996, 37: 9–15.
- [27] LASSAK M. Solution of Hadwiger's Covering Problem for Centrally Symmetric Convex Bodies in E^3 [J]. London Math., 1984, 2 (3): 501–511.
- [28] DEKSTER B V. Every Convex n -dimensional Body with a Smooth Belt can be Illuminated by $n+1$ Directions [J]. J. Geom., 1994, 49: 90–95.
- [29] DEKSTER B V. Each Convex Body in E^3 Symmetric about a Plane Can be Illuminated by 8 Directions [J]. J. Geom., 2000, 69: 37–50.
- [30] BOLTJANSKI V, SOLTAN P. Solution of the Hadwiger Problem for a Class of Convex Bodies [J]. Soviet Math. Doklady, 1991, 42 (1): 18–22.
- [31] BOLTJANSKI V, SOLTAN P. A Solution of Hadwiger's Problem for Zonoids [J]. Combinatorica, 1992, 12: 381–388.
- [32] BOLTJANSKI V. A Solution of the Illumination Problem for Belt Bodies [J]. Mat. Zametki, 1996, 58 (4): 505–511.
- [33] SZÖKEFALVI-NAGY B. Ein Satz über Parallelverschiebungen Konvexer Körper [J]. Acta. Sci. Math., 1954, 15 (3–4): 169–177.
- [34] BOLTJANSKI V. Solution of the Illumination Problem for Bodies with $md M=2$ [J]. Discrete Comput. Geom., 2001, 26: 527–541.
- [35] CHUANMING ZONG. A Quantitative Program for Hadwiger's Covering Conjecture [J]. Sci. China Math., 2010, 53: 2551–2560.
- [36] LASSAK M. Covering a Plane Convex Body by Four Homothetical Copies with the Smallest Positive Ratio [J]. Geom. Dedicata, 1986, 21 (2): 157–167.
- [37] WU Senlin. Two Equivalent Forms of Hadwiger's Covering Conjecture. [已投稿]
- [38] NASZÓDI M. Covering a Set with Homothets of a Convex Body [J]. Positivity, 2010, 14: 69–74.
- [39] JANUSZEWSKI J. Translative Covering of a Convex Body with Its Positive Homothetic Copies [J]. Studi. Sci. Math. Hungar., 2003, 40: 341–348.
- [40] SOLTAN V, VÁSÁRHELYI É. Covering a Convex Body by Smaller Homothetic Copies [J]. Geom. Dedicata, 1993, 45: 101–113.
- [41] ARTSTEIN-AVIDAN S, RAZ O. Weighted Covering Numbers of Convex Sets [J]. Adv. Math., 2011, 227: 730–740.
- [42] BEZDEK K. Research Problem [J]. Period. Math. Hungar., 1992, 24: 119–121.
- [43] BEZDEK K, BÖRÖCZKY R, KISS G. On the Successive Illumination Parameters of Convex Bodies [J]. Period. Math. Hungar., 2006, 53 (1–2): 71–82.
- [44] KISS G, WET P O. Notes on the Illumination Parameters of Convex Polytopes [J]. Manuscript, 2009: 1–12.
- [45] BANG T. A Solution of the “Plank Problem” [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2: 990–993.
- [46] SWANEPOEL K J. Quantitative Illumination of Convex Bodies and Vertex Degrees of Geometric Steiner Minimal Trees [J]. Mathematika, 2005, 52 (1–2): 47–52.
- [47] BEZDEK K, LITVAK A. On the Vertex Index of Convex Bodies [J]. Adv. Math., 2007, 215 (2): 626–641.
- [48] GLUSKIN E D, LITVAK A E. Asymmetry of Convex Polytopes and Vertex Index of Symmetric Convex Bodies [J]. Discrete Comput. Geom., 2008, 40 (4): 528–536.

(编辑: 温泽宇)